

UNE INTRODUCTION AU TEST NON PARAMETRIQUE D'AJUSTEMENT DE KOLMOGOROV-SMIRNOV AVEC *SPSS POUR WINDOWS*

*Dominique DESBOIS*¹

RESUME

Parmi les tests non paramétriques d'ajustement d'une distribution empirique à une distribution continue de probabilité, figure le test de Kolmogorov-Smirnov couramment utilisé comme test de l'hypothèse de normalité. Cette note a pour objectif de documenter la mise en œuvre de ce test au moyen de la procédure NPAR TESTS du logiciel *SPSS pour Windows*. Le listage des résultats obtenus est accompagné du formulaire associé à la procédure de test.

MOTS-CLES : test non paramétrique d'ajustement, test de normalité, test de Kolmogorov-Smirnov, logiciel statistique, mise en œuvre.

1. LES TESTS STATISTIQUES : PARAMETRIQUES, ROBUSTES, NON PARAMETRIQUES OU LIBRES ?

Le terme de **paramètre** désigne une valeur remarquable caractérisant la population, par exemple, celle d'un moment (moyenne, variance, etc .) d'une distribution de valeurs aléatoires pour la distinguer de son estimation fournie par l'échantillon. Les méthodes classiques de la statistique inférentielle présupposent en général que les données recueillies par échantillonnage de populations proviennent de lois de probabilités répertoriées et connues. La dénomination de **modèle paramétrique** s'appliquant aux méthodes classiques d'analyse statistique signifie simplement que les lois de probabilités choisies comme modèle théorique des aléas par ces méthodes font partie d'une famille de distribution dont les valeurs sont entièrement déterminées par un nombre fini de paramètres. Ainsi, la loi normale $N(\mu, \sigma)$, gouvernée par ses deux paramètres qui sont la moyenne μ et l'écart-type σ , est un modèle probabiliste fréquemment utilisé en raison de ses propriétés intrinsèques, notamment dans des situations où s'ajoutent des effets de faible magnitude provenant d'une multiplicité de causes indépendantes. Un **test d'hypothèse** est défini comme **paramétrique** s'il a pour objectif de tester une hypothèse particulière concernant la valeur d'un ou plusieurs paramètres de la population.

Par opposition, les problématiques qui s'intéressent à l'ensemble des valeurs, comme celle du test d'ajustement où une distribution empirique de valeurs issue d'un processus d'échantillonnage est comparée à la distribution d'une loi de probabilités hypothétique ou à une autre distribution empirique issue d'un échantillon tiré indépendamment, sont qualifiées de **non paramétriques**.

Certaines méthodes inférentielles tolèrent une violation mineure des hypothèses délimitant leur champ d'application. On qualifiera ces méthodes de **robustes** : par exemple, le test de Student est robuste à l'hypothèse de normalité alors que l'analyse de la variance ne l'est pas.

Cependant, les données observées s'écartent parfois suffisamment du modèle de référence pour que celui-ci apparaisse inadéquat, enlevant ainsi toute pertinence à la procédure de test ou à la technique

¹ INRA-ESR Nancy et SCEES - 251, rue de Vaugirard, 75732 Paris Cedex 15.

Fax : +33 1 49 55 85 00 Courriel : Dominique.Desbois@agriculture.gouv.fr

L'auteur remercie Laurence de Crémiers, maître de conférences des chaires de Statistique appliquée et de Modélisation statistique du CNAM pour les suggestions de lecture et les conseils prodigués sur ce thème mais reste seul responsable des éventuelles omissions ou erreurs contenues dans cette note.

d'analyse mise en œuvre. Ainsi, il est raisonnable de postuler que les distributions de notes d'examen sont en général approximativement normales. Par contre, utiliser un modèle de normalité pour des distributions de revenu peut se révéler franchement inacceptable en raison de la forte asymétrie de ces distributions, de la multimodalité de certaines d'entre-elles (mélange de populations hétérogènes) et de l'occurrence d'un plus grand nombre de valeurs extrêmes que ne le prédit le modèle de la loi normale. Palliant les limitations intrinsèques du recours aux modèles paramétriques, ont été développées des techniques d'analyse statistique qui ne font aucune hypothèse sur la distribution des valeurs dans la population. Ainsi, s'affranchit-on du cadre restrictif d'application qu'imposerait une distribution de probabilité théorique choisie comme modèle du caractère aléatoire de la réalité observée. En raison de l'absence d'hypothèses sur la distribution des valeurs dans la population, ces méthodes d'inférence statistique sont dites « **libres de distribution** »². D'une grande diversité conceptuelle, ces méthodes, également désignées comme « non paramétriques »³, permettent de prendre des décisions dans un contexte d'incertitude où les méthodes inférentielles classiques ne peuvent s'appliquer : distributions inconnues, petits échantillons, distributions asymétriques, platykurtiques ou leptokurtiques⁴. Leur utilisation est désormais plus répandue grâce à la puissance de calcul mis à la disposition du statisticien par le développement conjoint des logiciels statistiques et de la bureautique. En définitive, la terminologie utilisée permet de cerner la nature du problème (paramétrique ou non paramétrique), l'objectif du test (test d'ajustement, d'indépendance, de position, de dispersion...), et les propriétés intrinsèques de la méthode proposée (robuste ou libre). Ainsi, le test de Kolmogorov-Smirnov se range dans la catégorie des **tests libres** permettant de résoudre un problème **non paramétrique d'ajustement**.

2. LA LOI NORMALE COMME MODELE THEORIQUE

La distribution normale est un modèle souvent utilisé en statistiques comme loi de probabilités limite pour les distributions empiriques de valeurs, dans la description d'échantillons de grande taille. En effet, la somme et donc la moyenne de variables aléatoires sont asymptotiquement⁵ normales, aux conditions précisées par le théorème central limite (TCL) :

- ces variables aléatoires X_i doivent être indépendantes ;
- elles suivent une loi de probabilités identique ;
- pour chaque variable aléatoire X_i ,
 l'espérance mathématique $E[X_i] = \mu$, moyenne sur la population,
 la variance $V[X_i] = \sigma^2$, dispersion des valeurs autour de cette moyenne,
 existent et prennent une valeur finie.

Un tel résultat s'observe fréquemment : il s'agit de phénomènes soumis à des déterminations multiples et indépendantes dont l'influence marginale se cumule pour produire des valeurs distribuées selon la loi normale. La répétition indépendante d'erreurs aléatoires de mesure autour de leur valeur dans la population (la valeur « vraie ») est, en sciences expérimentales, une des situations venant illustrer le plus couramment un tel phénomène.

² ('*distribution-free*' dans la littérature scientifique d'expression anglo-saxonne qui leur est consacrée)

³ Certains auteurs utilisent le terme de « non-paramétrique » comme synonyme de « libre de distribution », en particulier pour désigner des techniques inférentielles qui permettent de s'affranchir du modèle de la loi normale.

⁴ Respectivement, plus dispersées ou plus concentrées autour de la moyenne que la loi normale.

⁵ lorsque n , la taille de l'échantillon, devient très grande.

La distribution de la loi normale $N(\mu, \sigma)$ est entièrement déterminée par les deux paramètres de population, la moyenne μ et l'écart-type σ , qui figurent dans l'expression analytique de sa densité,

$$\text{soit : } f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

En centrant (soustraction de l'espérance mathématique μ) et en réduisant (division par l'écart-type σ), on obtient une variable aléatoire $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ de moyenne nulle et d'écart-type unitaire. La densité de probabilité de cette variable aléatoire se déduit par changement de variable de l'expression analytique précédente, soit :

$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}z^2\right\}$ densité de probabilité de la loi normale centrée réduite $N(0,1)$.

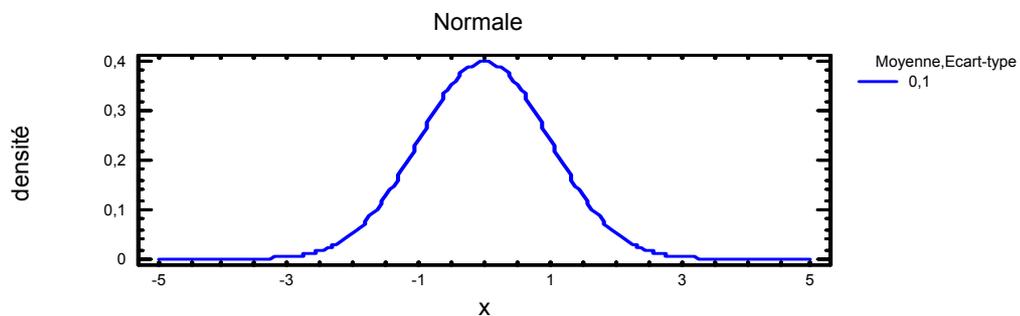


Figure 1 : *graphe de la densité de probabilité pour la loi normale centrée réduite, $N(0,1)$.*

Toute variable aléatoire normale X peut ainsi s'exprimer comme fonction de ses paramètres, moyenne et d'écart-type, en se déduisant de la loi normale centrée réduite :

$$X = \mu + \sigma \cdot Z .$$

Si l'on examine la distribution des valeurs de la loi normale centrée réduite, on constate que, comme toute loi normale, cette distribution est symétrique et centrée sur sa moyenne (égale à 0), valeur qui est également la médiane et le mode de la distribution.

La distribution des probabilités cumulées est représentée par la fonction de répartition, définie par :

$$F(x) = P(X < x)$$

généralement notée : $\Phi(z) = P(Z < z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ pour la loi normale centrée réduite.

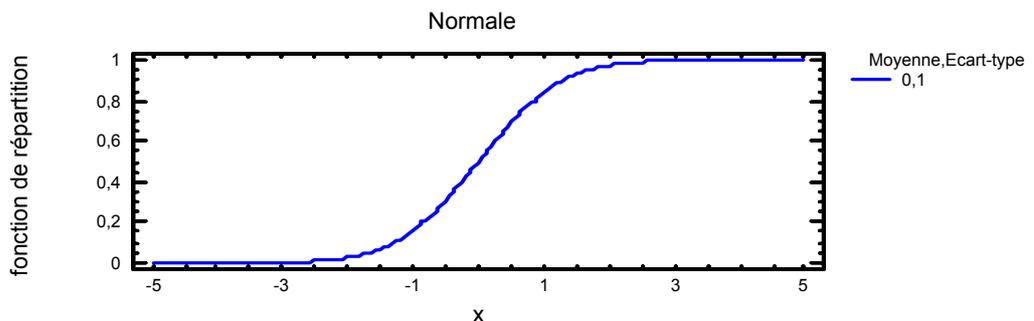


Figure 2 : *graphe de la fonction de répartition pour la loi normale centrée réduite, $N(0,1)$.*

On constate la symétrie du graphe de cette fonction de répartition autour du point $(x=0 ; f=1/2)$, que traduit également la propriété suivante, utilisée dans les tests bilatéraux :

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) .$$

3. PROBLEMATIQUE : TESTER L'HYPOTHESE DE NORMALITE EN ANALYSE DE LA VARIANCE

L'étude de l'interaction génotype-environnement permet d'analyser l'adaptation des différentes variétés de cultivars aux différents environnements culturaux. Le modèle stochastique retenu est un modèle additif d'analyse de la variance à deux facteurs avec interaction :

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk} \text{ avec } \varepsilon_{ijk} \rightarrow N_{(0,\sigma)}$$

ou ce qui est équivalent $Y_{ijk} \rightarrow N_{(\mu_{ij},\sigma)}$ avec $\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}$

Lors d'un essai agronomique de sélection croisant génotype et environnement, on souhaite tester la normalité du rendement de variétés de soja pour vérifier une des conditions d'application de l'analyse de la variance.

Ce modèle suppose la normalité des erreurs ε_{ijk} , variables aléatoires inobservables. Cependant, dans le cadre de ce modèle, tester la normalité des erreurs revient à tester la normalité des rendements observés, Y_{ijk} , puisque les autres facteurs sont déterministes.

Le problème est donc de tester la normalité des séries de valeurs Y_{ijk} du rendement à l'hectare du soja exprimé en kilogrammes, dans différents environnements (stations agronomiques 'A77', 'V79', etc.) représentatifs des conditions de mise en culture pour les variétés de soja ('EVAN', 'WILK', etc.) étudiées dans le cadre d'un dispositif d'évaluation et de sélection variétale ⁶.

	env\$	gen\$	envnum	gennum	rep	yield
1	A77	EVAN	1	1	1	2729
2	A77	EVAN	1	1	2	2747
3	A77	EVAN	1	1	3	2593
4	A77	EVAN	1	1	4	2382
5	A77	WILK	1	2	1	2662
6	A77	WILK	1	2	2	2238
7	A77	WILK	1	2	3	2454
8	A77	WILK	1	2	4	2528
9	A77	CHIP	1	3	1	2638
10	A77	CHIP	1	3	2	2425
11	A77	CHIP	1	3	3	2191
12	A77	CHIP	1	3	4	2079
13	A77	HODG	1	4	1	2680
14	A77	HODG	1	4	2	2072
15	A77	HODG	1	4	3	2994
16	A77	HODG	1	4	4	3218
17	A77	S200	1	5	1	2598
18	A77	S200	1	5	2	3036
19	A77	S200	1	5	3	3097
20	A77	S200	1	5	4	2641
21	A77	CORS	1	6	1	2908
22	A77	CORS	1	6	2	3430
23	A77	CORS	1	6	3	3265
24	A77	CORS	1	6	4	2823
25	A77	WELL	1	7	1	2732

Figure 3 : le tableau des données sous SPSS.

⁶ Ces données expérimentales sont reprises d'un cas d'étude proposé par l'unité de Biométrie de l'International Rice Research Institute pour la formation à l'analyse de l'interaction génotype-environnement.

4. TESTS GRAPHIQUES D'AJUSTEMENT A UNE DISTRIBUTION NORMALE

Pour les variables continues, l'histogramme avec superposition du graphe de la fonction de densité de la loi normale de même moyenne et d'écart-type, constitue une première vérification de l'ajustement d'une distribution empirique à la loi normale. Si l'on examine la distribution de la variable quantitative « produit brut » observée sur l'échantillon breton du Réseau d'information comptable agricole (Rica) en 1990, l'histogramme met en évidence que l'écart au modèle de la loi normale provient d'une forte asymétrie et d'une plus grande fréquence des valeurs extrêmes.

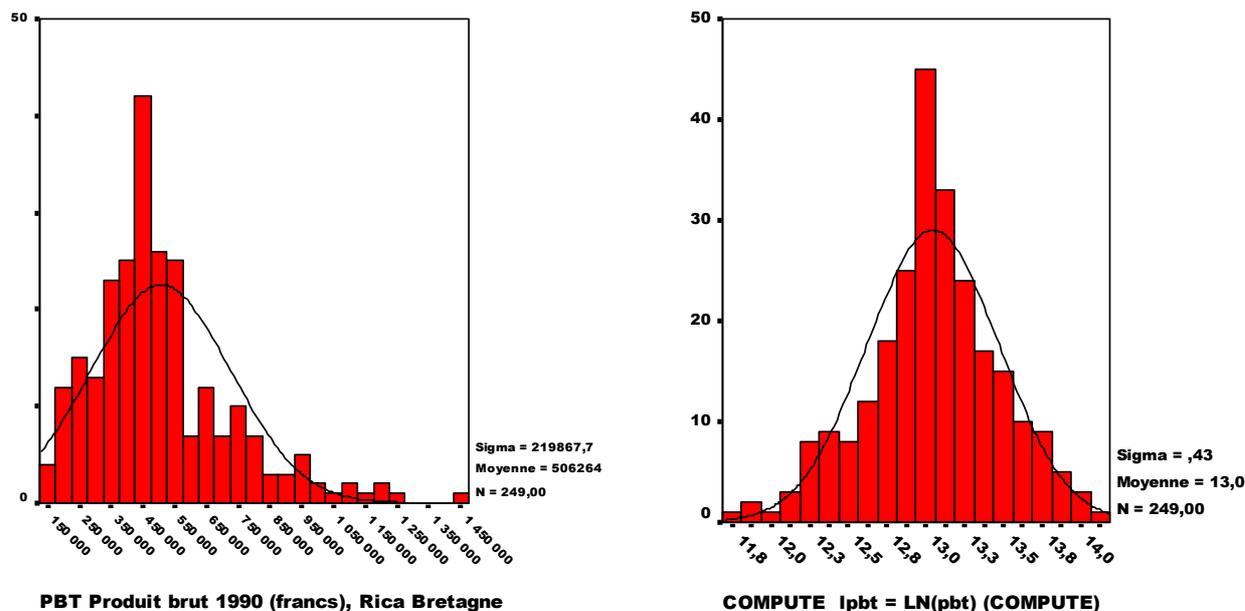


Figure 4 : distribution asymétrique du produit brut et sa transformation par le logarithme népérien.

En réduisant l'échelle des écarts pour les valeurs extrêmes, la transformation par le logarithme népérien⁷ atténue l'asymétrie de la distribution originale. De fait, la distribution empirique transformée s'ajuste mieux au modèle de la loi normale. Ainsi, tester la normalité de la distribution des données transformées revient à tester la log-normalité des données originales. Convenablement choisies selon les caractéristiques de la distribution empirique originale, un certain nombre de fonctions comme le logarithme, ou la racine carrée permettent de transformer cette distribution pour la rendre conforme à un modèle théorique de distribution aléatoire, comme celui de la loi normale.

Les procédures graphiques d'ajustement à une distribution théorique constituent également des tests libres puisqu'elles n'impliquent aucune hypothèse a priori sur la distribution des données, hormis celle que l'on souhaite tester.

Ces tests graphiques peuvent être menés soit dans l'espace des probabilités comme le diagramme *P-P* (*Probability-Probability*, croisant deux distributions de probabilités), soit dans l'espace des valeurs comme le diagramme *Q-Q* (*Quantile-Quantile*, croisant deux distributions de valeurs correspondant à une probabilité cumulée donnée).

Le test d'ajustement graphique à une distribution théorique, constitué par le diagramme *P-P* met en relation distribution observée et distribution théorique en utilisant leurs probabilités comme coordonnées d'un diagramme de points. Ainsi, le diagramme *P-P* permet de visualiser les écarts entre la fonction de répartition empirique des rendements observés pour les différentes variétés de soja et la fonction de répartition de la loi de Laplace-Gauss de mêmes paramètres, moyenne et écart-type,

⁷ Fonction logarithmique de base e (i.e. définie par l'équation $\ln[e]=1$).

estimés d'après l'échantillon. On peut vérifier graphiquement l'ajustement globalement satisfaisant des rendements de soja observés par rapport au modèle théorique de la loi normale (cf. figure 5).

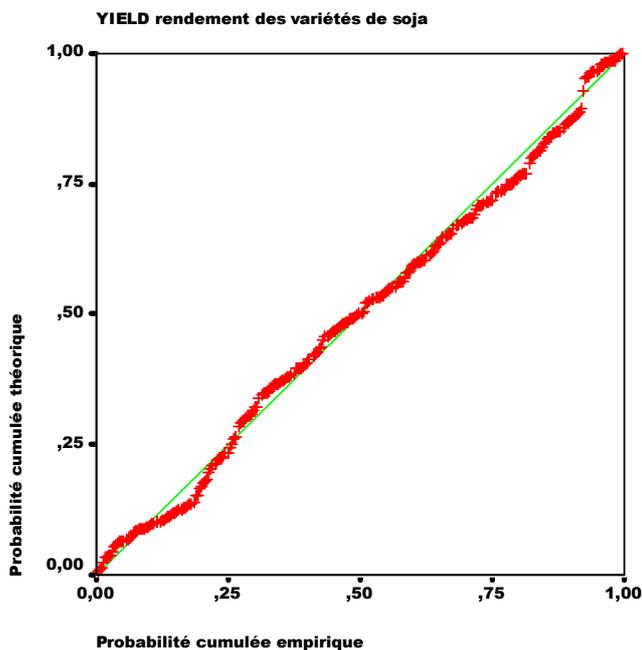


Figure 5 : *diagramme P-P d'ajustement des rendements de soja à la loi normale.*

Cette comparaison peut également être effectuée dans l'espace des valeurs avec le diagramme $Q-Q$. Il permet de situer les écarts constatés sur l'échelle des valeurs pour la distribution du produit brut. Les écarts des points par rapport à la première diagonale traduisent les défauts d'ajustement de la distribution empirique des valeurs du produit brut par rapport à la distribution théorique, ici la loi normale.

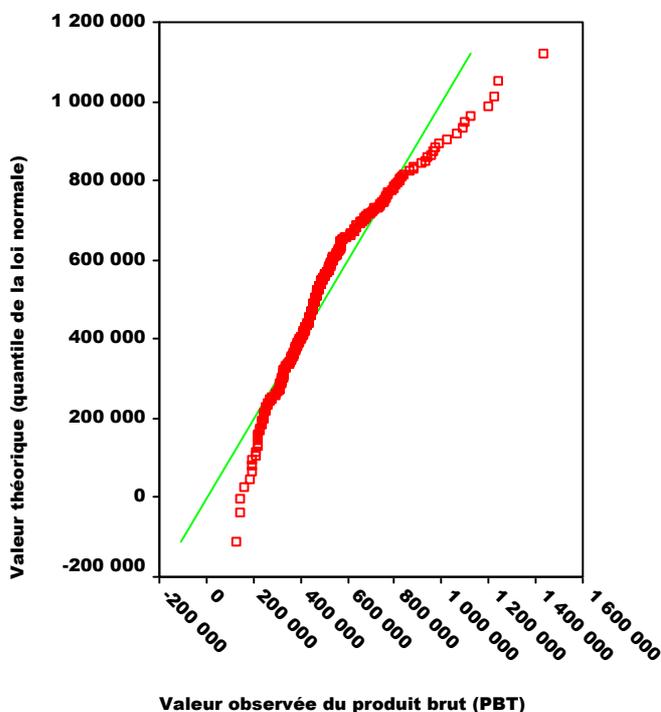


Figure 6 : *diagramme Q-Q d'ajustement des valeurs du produit brut à la loi normale.*

5. TEST DE NORMALITE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

5.1 Fondements théoriques du test de Kolmogorov-Smirnov

Le test d'ajustement de **Kolmogorov-Smirnov** est un test libre qui permet de vérifier si un échantillon aléatoire peut provenir d'une distribution de probabilités particulière pour une variable continue (échelle métrique). Si la distribution de probabilités testée est la loi de Laplace-Gauss (distribution normale), ce test d'ajustement fournit une épreuve de normalité.

La fonction de répartition empirique des valeurs x_i d'un n -échantillon étant définie par :

$$F_n^e(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < x_1 \\ \frac{i-1}{n} & \text{if } x_{i-1} \leq x < x_i \\ 1 & \text{if } x_n \leq x \end{cases}$$

ce test non paramétrique effectue une comparaison entre la fonction de répartition empirique $F_n^e(x)$ et la fonction de répartition théorique $F(x) = P(X \leq x)$ de la loi de probabilités considérée.

Le test de Kolmogorov-Smirnov est fondé sur le théorème de Glivenko-Cantelli qui affirme la convergence uniforme de la fonction de répartition empirique F_n^e presque sûrement vers la fonction de répartition théorique F .

Cette convergence peut être formulée ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n^e(x) - F(x)| \right\} = 0$$

La comparaison entre les deux distributions cumulées, empirique et théorique, s'effectue sur la base de la statistique de Kolmogorov-Smirnov :

$$D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n^e(x) - F(x)|$$

D'après le théorème de Kolmogorov, sous l'hypothèse nulle H_0 d'identité des deux distributions,

$$\begin{cases} H_0 : & F(x) = F_n^e(x) \\ H_1 : & F(x) \neq F_n^e(x) \end{cases}$$

la statistique D_n suit asymptotiquement la distribution de probabilités (distribution de Kolmogorov-Smirnov) définie par :

$$P(\sqrt{n}D_n < y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K(y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \exp\{-2k^2 y^2\}$$

La région critique W_α de risque α est déterminée par $W_\alpha = \{D_n > d_{1-\alpha}(n)\}$ où $d_{1-\alpha}(n)$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la distribution de Kolmogorov-Smirnov pour un échantillon de taille n (cf. table A1 en annexe).

Si on utilise le test de Kolmogorov-Smirnov comme épreuve de normalité, la fonction de répartition théorique est définie par la fonction de répartition d'une loi normale $N(\mu, \sigma)$, de moyenne μ et d'écart-type σ .

5.2. Interprétation des résultats du test de Kolmogorov-Smirnov

La procédure de test non paramétrique NPAR TESTS du logiciel SPSS permet d'effectuer le test de Kolmogorov-Smirnov pour un échantillon unique : il suffit d'indiquer la variable à tester, ici les rendements à l'hectare du soja, et la distribution théorique retenue, en l'occurrence la distribution gaussienne.

L'hypothèse nulle H_0 est alors formulée ainsi : la distribution empirique suit une loi normale $N(\mu, \sigma)$.

Test de Kolmogorov-Smirnov à un échantillon

		YIELD
N		280
Paramètres normaux ^{a, b}	Moyenne	2673.38
	Ecart-type	936.38
Différences les plus extrêmes	Absolue	.047
	Positive	.047
	Négative	-.035
Z de Kolmogorov-Smirnov		.791
Signification asymptotique (bilatérale)		.559

a. La distribution à tester est gaussienne.

b. Calculée à partir des données.

Tableau 1 : résultats du test de normalité de Kolmogorov-Smirnov pour un échantillon unique.

À partir du rendement observé des essais variétaux concernant le soja, le rendement moyen estimé d'après l'échantillon est de 2 673,38 kilogrammes avec un écart-type de 936,38 kilogrammes.

Les différences les plus extrêmes observées entre les fonctions de répartition de la distribution empirique et la distribution théorique de probabilité sont $F_{280}^e(x_0) - F(x_0) = 0,047$ en écart positif et $F_{280}^e(x'_0) - F(x'_0) = -0,035$ en écart négatif.

L'écart absolu le plus élevé est donc : $D_{280} = \underset{\text{re}}{\text{Sup}}(F_{280}^e(x) - F(x)) = 0,047$.

On en déduit la valeur de la statistique de Kolmogorov : $Z_{280} = \sqrt{280} * 0,047 = 0,791$

Un écart d'une telle ampleur s'observe dans 55,9 % des échantillons aléatoires tirés d'une population dont la distribution des rendements suit une loi normale.

Cet écart étant trop faible, le risque d'erreur de première espèce⁸ (55,9 %) est trop grand. On conservera donc l'hypothèse de normalité des rendements observés.

⁸ de rejeter à tort de l'hypothèse nulle H_0 d'identité entre les deux distributions.

En toute rigueur, ce raisonnement ne peut s'appliquer que si l'on connaît les paramètres de la distribution à tester, c'est à dire les valeurs inconnues dans la population : ici, la moyenne et l'écart-type pour la loi normale.

Si ces paramètres sont estimés d'après l'échantillon comme dans le présent exemple

la moyenne μ est estimée par \bar{X}_n

$$\text{la variance par } S_n^{*2} = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

alors, en général, la distribution des valeurs de la statistique D_n n'est pas connue.

On peut cependant utiliser les résultats empiriques obtenus par simulation dans [Biometrika, 1969-72] qui donnent pour le test les valeurs critiques suivantes :

- au risque de première espèce $\alpha = 5 \%$, on rejette l'hypothèse nulle pour

$$\left(\sqrt{n} + \frac{0,85}{\sqrt{n}} - 0,01 \right) * D_n > 0,895$$

- au risque de première espèce $\alpha = 1 \%$, on rejette l'hypothèse nulle pour

$$\left(\sqrt{n} + \frac{0,85}{\sqrt{n}} - 0,01 \right) * D_n > 1,035$$

soit, pour le rendement des variétés de soja

$$\left(\sqrt{280} + \frac{0,85}{\sqrt{280}} - 0,01 \right) * 0,047 \approx 0,788$$

Suivant ces règles, on est donc amené à conserver l'hypothèse nulle de normalité pour cette distribution empirique au risque de première espèce de 5 %.

6. MISE EN ŒUVRE DES PROCEDURES SPSS

6.1. Histogramme

L'appel de la procédure graphique pour l'histogramme s'effectue en sélectionnant le choix [Histogramme] du menu [Graphes].

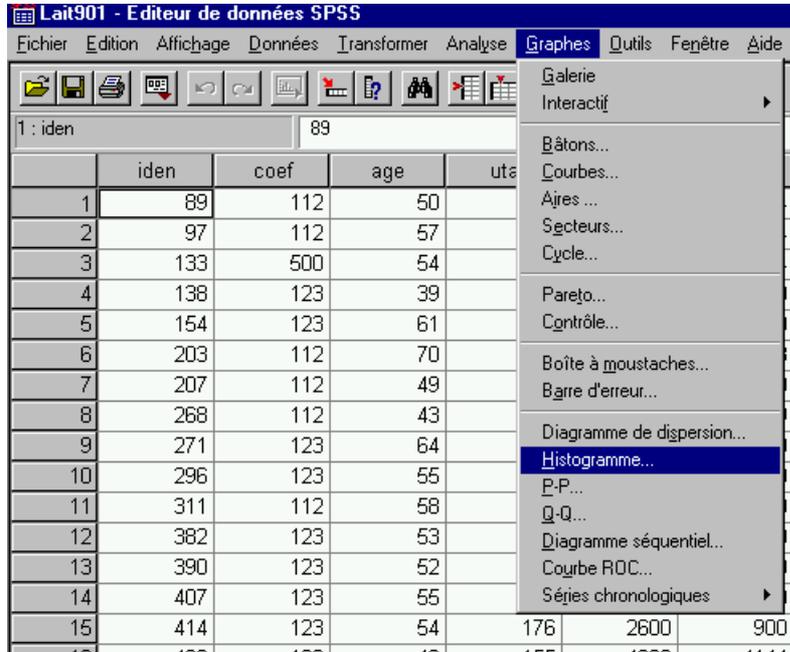


Figure 7 : appel de la procédure graphique pour tracer l'histogramme d'une variable continue.

Il suffit alors de sélectionner la [Variable] à examiner en utilisant le bouton-poussoir (variable [pbt]) et de cocher le choix [Afficher la courbe gaussienne].

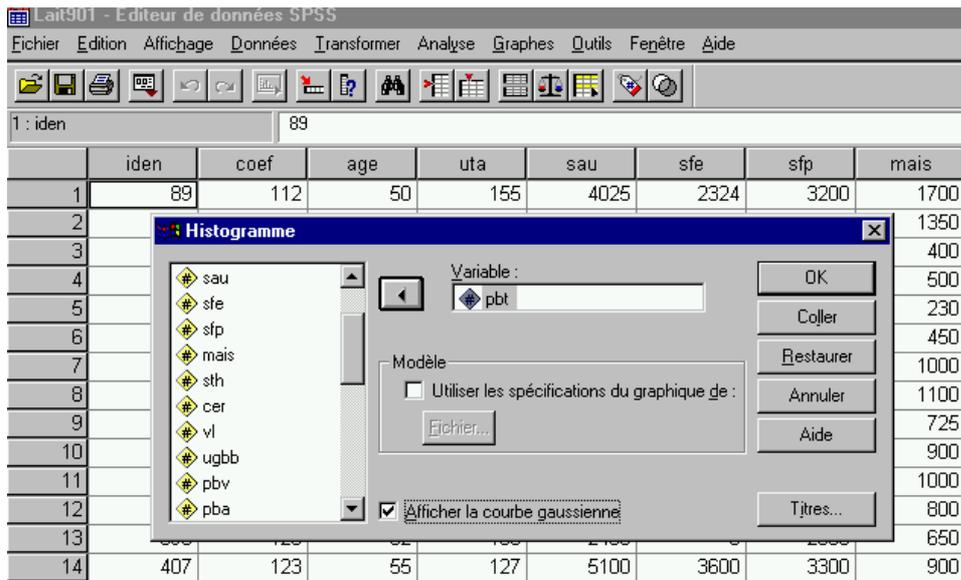


Figure 8 : appel de la procédure graphique pour tracer l'histogramme d'une variable continue.

6.2. Diagrammes P-P et Q-Q

L'appel de la procédure graphique du diagramme P-P (respectivement, du diagramme Q-Q) s'effectue en sélectionnant le choix [P-P] (respectivement, le choix [Q-Q]) du menu [Graphes].

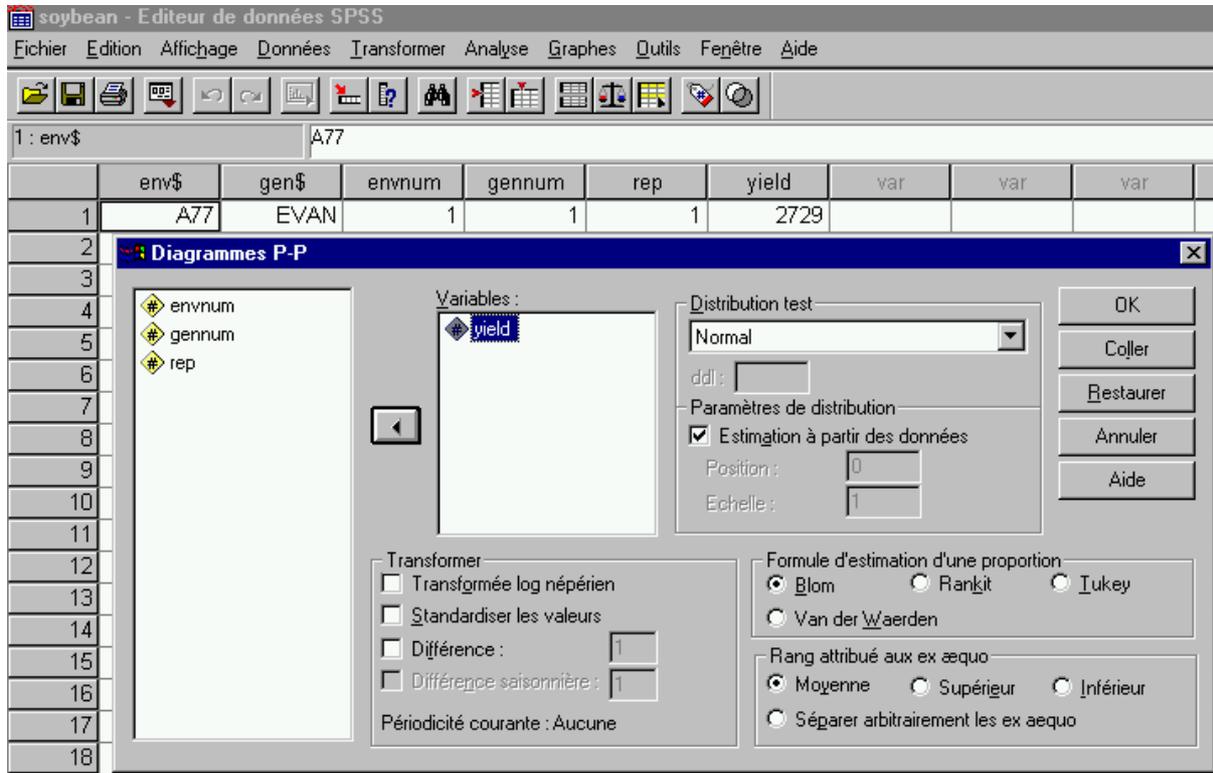


Figure 9 : mise en œuvre des tests d'ajustement graphique, diagramme P-P ou Q-Q.

L'appel de la procédure [P-P] ouvre une boîte de dialogue qui permet de préciser les options de cette procédure graphique pour un échantillon (cf. figure 10). On peut tester ainsi les distributions théoriques de probabilité les plus courantes :

- Bêta ;
- Khi-deux ;
- Exponentielle ;
- Gamma ;
- Semi-normale ;
- Laplace ;
- Logistique ;
- Lognormal ;
- Normal ;
- Pareto ;
- t de Student ;
- Weibull ;
- Uniforme.

L'option proposée par défaut est celle de la loi normale : ce qui correspond au test que nous voulons effectuer.

L'analyse peut porter sur une variable ou sur un groupe de variables, ici la variable d'intérêt [yield] a été introduite dans la liste des variables à tester au moyen du bouton-poussoir approprié.

On peut soit spécifier les paramètres de position et d'échelle de la distribution empirique, soit les estimer d'après l'échantillon (option par défaut).

L'estimation de la proportion liée aux quantiles de la distribution des valeurs empiriques peut s'effectuer selon différents calculs de score :

- Blom ;
- Rankit ;
- Tukey ;
- Van der Waerden.

L'option proposée par défaut est celle de Blom qui correspond à la définition que nous avons donnée de la fonction de répartition empirique. Enfin, pour traiter les problèmes d'ex-aequo, parmi les options proposées, on utilise celle du rang moyen, option par défaut.

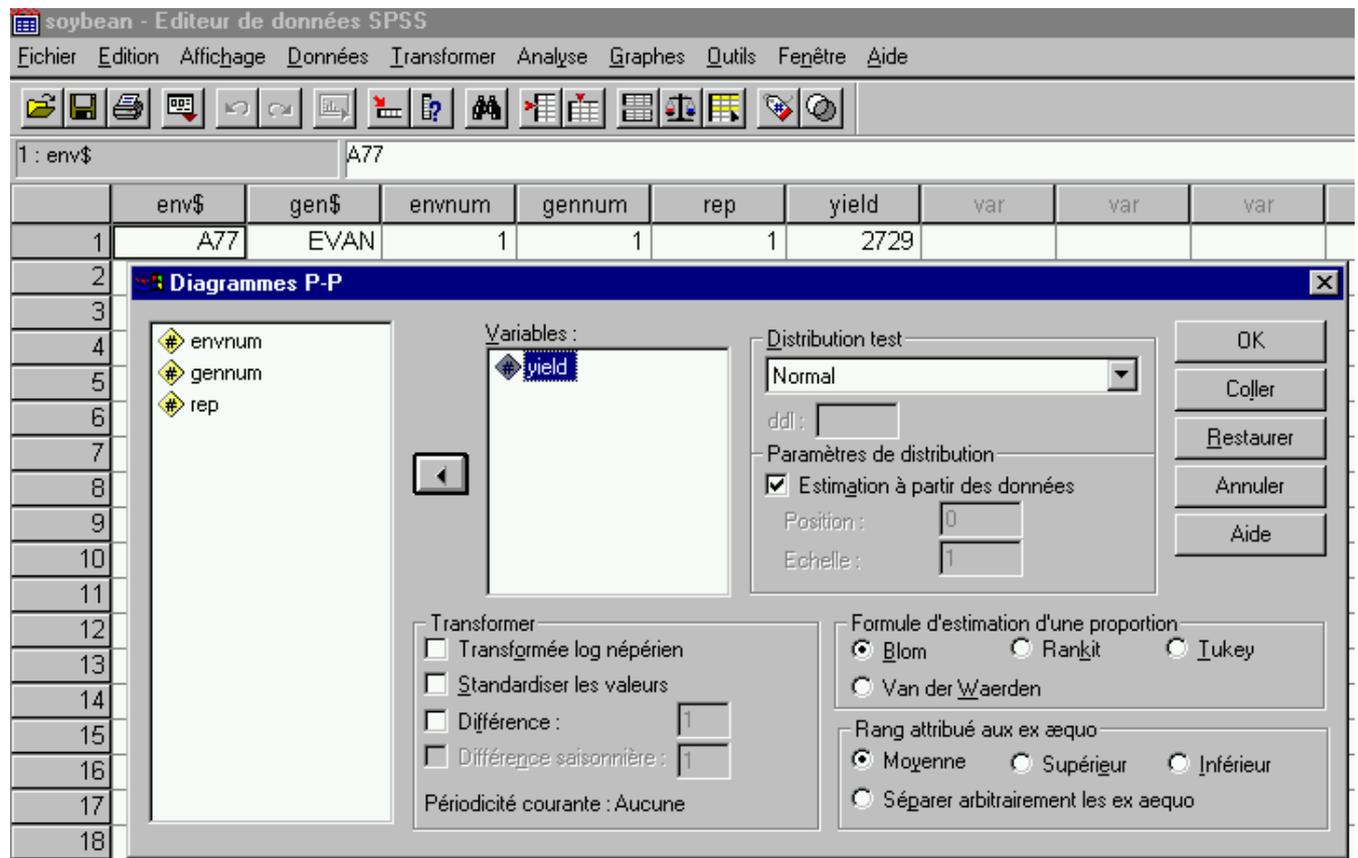


Figure 10 : options de traitement pour le diagramme P-P ou le diagramme Q-Q.

6.3. Test de Kolmogorov-Smirnov

L'appel de la procédure non paramétrique du test de Kolmogorov-Smirnov pour un échantillon s'effectue en sélectionnant le choix [Tests non paramétriques] du menu [Analyse] puis l'option [K-S à 1 échantillon] du sous-menu de la procédure SPSS de tests non paramétriques.



Figure 11 : appel de la procédure non paramétrique du test de Kolmogorov-Smirnov sous SPSS.

L'appel de la procédure [K-S à 1 échantillon] ouvre une boîte de dialogue qui permet de préciser la spécification du test de Kolmogorov-Smirnov pour un échantillon (cf. figure 12).

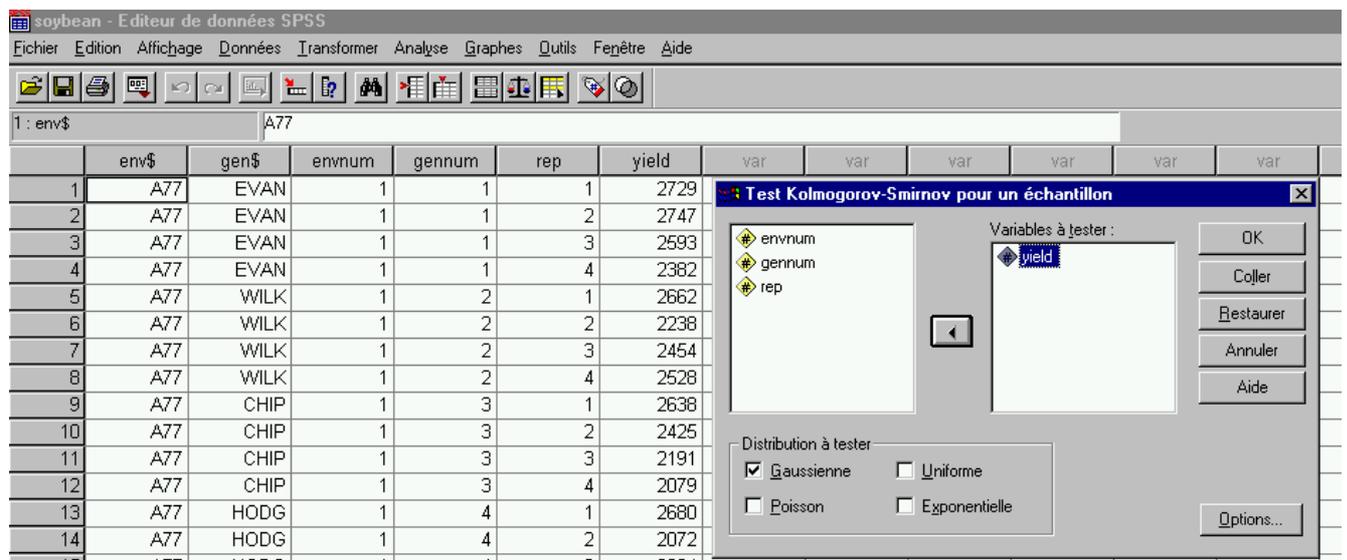


Figure 12 : spécification du test de Kolmogorov-Smirnov sous SPSS.

La variable à tester est le rendement à l'hectare [yield] du soja.

Les distributions théoriques de probabilités proposées pour le test de Kolmogorov-Smirnov dans la procédure de tests non paramétriques par SPSS sont :

- la loi uniforme ([Uniforme]) ;
- la loi exponentielle ([Exponentielle]) ;
- la loi de Poisson ([Poisson]) ;
- la loi normale ([Gaussienne]).

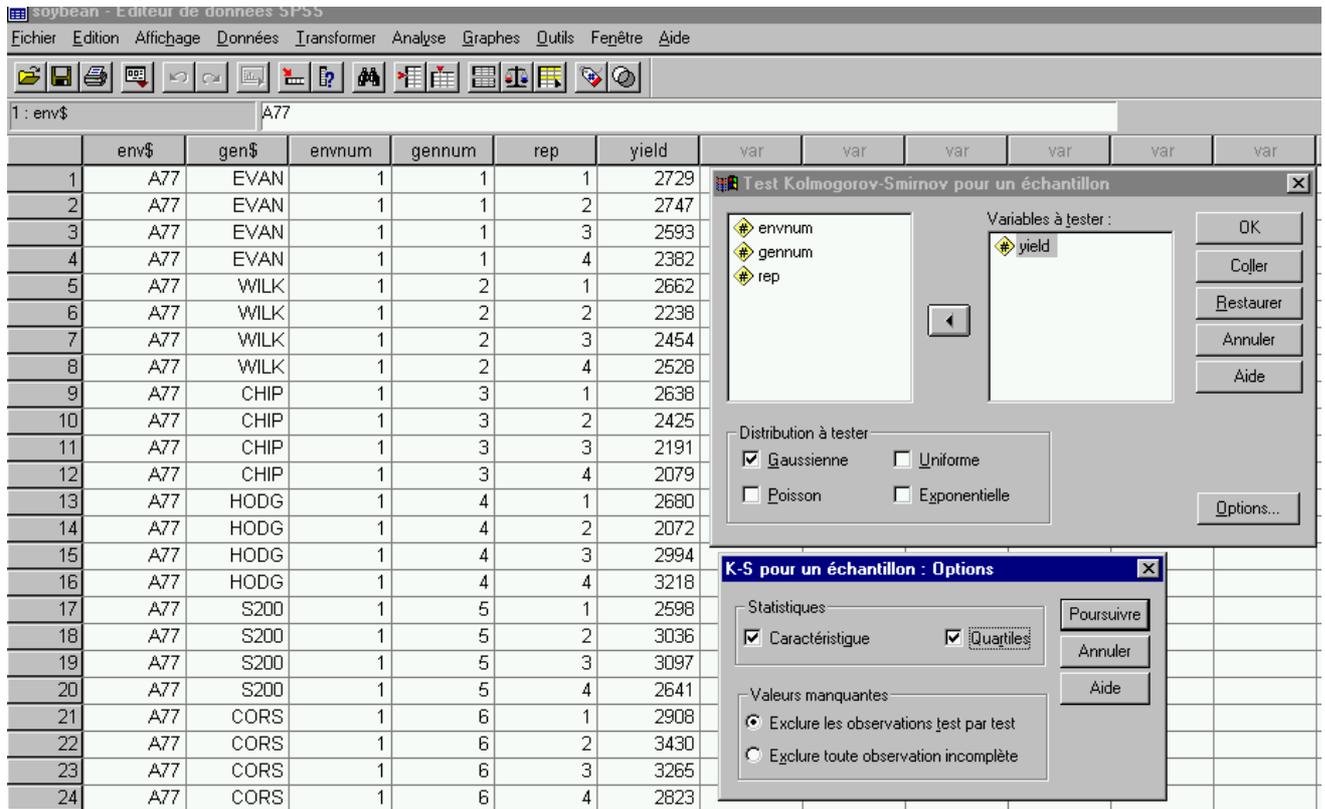


Figure 13 : options procédurales du test de Kolmogorov-Smirnov sous SPSS.

La variable à tester étant une variable quantitative, il peut être utile de demander comme options procédurales (cf. figure 13) les caractéristiques de la distribution empirique (moyenne, écart-type) et les quantiles. D'autant que, pour les échantillons dont la taille est supérieure à $n = 50$ individus, les paramètres μ et σ de la distribution normale sont estimés d'après la moyenne et l'écart-type de l'échantillon.

7. QUELQUES REPERES HISTORIQUES SUR LES TESTS D'AJUSTEMENT NON PARAMETRIQUES

S'agissant de problèmes non paramétriques, la première résolution, formellement attestée par une publication, d'un problème d'ajustement d'un modèle probabiliste théorique à des données observées est le test du Khi-deux présenté par Karl Pearson en 1900⁹.

Pour éviter d'avoir à effectuer des regroupements de données (comme dans le cas du test du Khi-deux) Cramér en 1928 puis von Mises en 1931 introduisent séparément une statistique de test fondée sur le carré de la différence entre la fonction de répartition empirique $F_n^e(x)$ et celle de la loi théorique testée $F(x)$:

$$W_n^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} [F_n^e(x) - F(x)]^2 dF(x)$$

L'intérêt de la statistique de Cramér-von Mises réside dans le fait que la distribution de ses valeurs est indépendante de la distribution théorique à tester.



Andrei Nicolaïevitch Kolmogorov (1903-1987)



Vladimir Ivanovitch Smirnov (1887-1974).

Figure 14 : portraits de Kolmogorov et de Smirnov

En 1933, Kolmogorov introduit la norme de l'écart absolu entre la fonction de répartition empirique et celle de la loi testée, $\text{Sup}_x |F_n(x) - F_0(x)|$ dont il détermine la loi asymptotique.

Dès 1936, Smirnov établit la distribution asymptotique de la statistique de Cramér-von Mises sous l'hypothèse de conformité à la distribution théorique.

En 1939, Smirnov propose un test unilatéral de comparaison des lois de deux échantillons, basé sur la

statistique de Kolmogorov $Z_n = \sqrt{n} * D_n = \sqrt{n} * \text{Sup}_n |F_n(x) - G_n(x)|$.

⁹ dans un article intitulé « *On the Criterion that a given System of Deviations from the Probable in the Case of a Correlated System of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from Random Sampling* ».

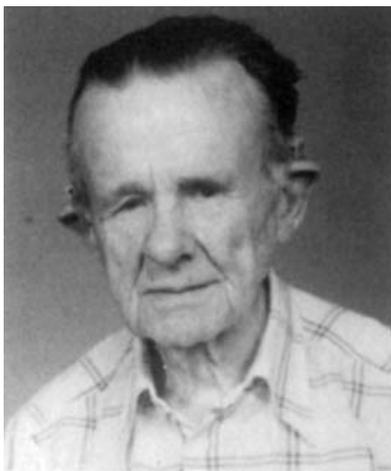
8. BIBLIOGRAPHIE

REFERENCES USUELLES

- Droesbeke J.-J., Fine J. (dir.) (1996) *Inférence non paramétrique. Les statistiques de rangs*, Editions de l'Université de Bruxelles, Bruxelles, 304 p.
- Kendall M.G., Stuart A. (1967) *The Advanced Theory of Statistics. Volume 2: Inference and Relationship 2nd ed.*, Charles Griffin & Co, 690 p.
- Pearson E.S., Hartley H.O. (1969-72) *Biometrika Tables for Statisticians*, Cambridge University Press.
- Saporta G. (1990) *Probabilités, analyse des données et statistique*, Technip, Paris, 493 p.
- Sprenst P. (1992) *Pratique des statistiques nonparamétriques*, traduction J.-P. Ley, Inra, Paris, 294 p.
- SPSS Inc. (1999) *SPSS Base 10.0 Applications Guide*, SPSS Inc., Chicago, 426 p.

RÉFÉRENCES HISTORIQUES

- Cramér H. (1928) « On the Composition of Elementary Errors », *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 11, pp. 13-74, 141-180.
- Kolmogorov A.N. (1933). « Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione », *Giornale dell'Instituto Italiano degli Attuari.*, 4, pp 83-91.
- Kolmogorov A.N., (1941) « Confidence Limits for an Unknown Distribution Function », *Ann. Math. Stat.*, 12, pp. 461-463.
- Smirnov I.V. (1939) « On the Estimation of the Discrepancy between Empirical Curves of Distribution for Two Independent Samples », *Bull. Math. Univ. Moscou*, 2, pp. 3-14.
- Smirnov I.V. (1948). « Tables for Estimating the Goodness of Fit of Empirical Distributions », *Ann. Math. Stat.*, 19, pp. 279-281.
- Von Mises R. (1931) *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Leipzig, Deuticke.
- Von Mises R. (1947) « On the Asymptotic Distribution of Differentiable Statistical Functions », *Ann. Math. Stat.*, 18, pp. 309-348.



Harald Cramér (1893-1985)



Richard von Mises (1883-1953).

Figure 15 : portraits de Cramér et de von Mises

9. ANNEXE

Tableau A1 : test de Kolmogorov-Smirnov, table des valeurs de d_n telles que $p = P(D_n < d_n)$.

n	P=0,80	P=0,90	P=0,95	P=0,98	P=0,99
1	0,90000	0,95000	0,97500	0,99000	0,99500
2	0,68377	0,77639	0,84189	0,90000	0,92929
3	0,56481	0,63604	0,70760	0,78456	0,82900
4	0,49265	0,56522	0,62394	0,68887	0,73424
5	0,44698	0,50945	0,56328	0,62718	0,66853
6	0,41037	0,46799	0,51926	0,57741	0,61661
7	0,38148	0,43607	0,48342	0,53844	0,57581
8	0,35831	0,40920	0,45427	0,50654	0,54179
9	0,33910	0,38746	0,43001	0,47960	0,51332
10	0,32260	0,36866	0,40925	0,45662	0,48893
11	0,30829	0,35242	0,39122	0,43670	0,46770
12	0,29577	0,33815	0,37543	0,41918	0,44905
13	0,28470	0,32549	0,36143	0,40362	0,43247
14	0,27481	0,31417	0,34890	0,38970	0,41762
15	0,26588	0,30397	0,33760	0,37713	0,40420
16	0,25778	0,29472	0,32733	0,36571	0,39201
17	0,25039	0,28627	0,31796	0,35528	0,38086
18	0,24360	0,27851	0,30936	0,34569	0,37062
19	0,23735	0,27136	0,30143	0,33685	0,36117
20	0,23156	0,26473	0,29408	0,32866	0,35241
21	0,22617	0,25858	0,28724	0,32104	0,34427
22	0,22115	0,25283	0,28087	0,31394	0,33666
23	0,21645	0,24746	0,27490	0,30728	0,32954
24	0,21205	0,24242	0,26931	0,30104	0,32286
25	0,20790	0,23768	0,26404	0,29516	0,31657
26	0,20399	0,23320	0,25907	0,28962	0,31064
27	0,20030	0,22898	0,25438	0,28438	0,30502
28	0,19680	0,22497	0,24993	0,27942	0,29971
29	0,19348	0,22117	0,24571	0,27471	0,29466
30	0,19032	0,21756	0,24170	0,27023	0,28987
31	0,18732	0,21412	0,23788	0,26596	0,28530
32	0,18445	0,21085	0,23424	0,26189	0,28094
33	0,18171	0,20771	0,23076	0,25801	0,27677
34	0,17909	0,20472	0,22743	0,25429	0,27279
35	0,17659	0,20185	0,22425	0,25073	0,26897
36	0,17418	0,19910	0,22119	0,24732	0,26532
37	0,17188	0,19646	0,21826	0,24404	0,26180
38	0,16966	0,19392	0,21544	0,24089	0,25843
39	0,16753	0,19148	0,21273	0,23786	0,25518
40	0,16547	0,18913	0,21012	0,23494	0,25205
41	0,16349	0,18687	0,20760	0,23213	0,24904
42	0,16158	0,18468	0,20517	0,22941	0,24613
43	0,15974	0,18257	0,20283	0,22679	0,24332
44	0,15796	0,18053	0,20056	0,22426	0,24060
45	0,15623	0,17856	0,19837	0,22181	0,23798
46	0,15457	0,17665	0,19625	0,21944	0,23544
47	0,15295	0,17481	0,19420	0,21715	0,23298
48	0,15139	0,17302	0,19221	0,21493	0,23059
49	0,14987	0,17128	0,19028	0,21277	0,22828
50	0,14840	0,16959	0,18841	0,21068	0,22604

n	P=0,80	P=0,90	P=0,95	P=0,98	P=0,99
51	0,14697	0,16796	0,18659	0,20864	0,22386
52	0,14558	0,16637	0,18482	0,20667	0,22174
53	0,14423	0,16483	0,18311	0,20475	0,21968
54	0,14292	0,16332	0,18144	0,20289	0,21768
55	0,14164	0,16186	0,17981	0,20107	0,21574
56	0,14040	0,16044	0,17823	0,19930	0,21384
57	0,13919	0,15906	0,17669	0,19758	0,21199
58	0,13801	0,15771	0,17519	0,19590	0,21019
59	0,13686	0,15639	0,17373	0,19427	0,20844
60	0,13573	0,15511	0,17231	0,19267	0,20673
61	0,13464	0,15385	0,17091	0,19112	0,20506
62	0,13357	0,15263	0,16956	0,18960	0,20343
63	0,13253	0,15144	0,16823	0,18812	0,20184
64	0,13151	0,15027	0,16693	0,18667	0,20029
65	0,13052	0,14913	0,16657	0,18525	0,19877
66	0,12954	0,14802	0,16443	0,18387	0,19729
67	0,12859	0,14693	0,16322	0,18252	0,19584
68	0,12766	0,14587	0,16204	0,18119	0,19442
69	0,12675	0,14483	0,16088	0,17990	0,19303
70	0,12586	0,14381	0,15975	0,17863	0,19167
71	0,12499	0,14281	0,15864	0,17739	0,19034
72	0,12413	0,14183	0,15755	0,17618	0,18903
73	0,12329	0,14087	0,15649	0,17498	0,18776
74	0,12247	0,13993	0,15544	0,17382	0,18650
75	0,12167	0,13901	0,15442	0,17268	0,18528
76	0,12088	0,13811	0,15342	0,17155	0,18408
77	0,12011	0,13723	0,15244	0,17045	0,18290
78	0,11935	0,13636	0,15147	0,16938	0,18174
79	0,11860	0,13551	0,15052	0,16832	0,18060
80	0,11787	0,13467	0,14960	0,16728	0,17949
81	0,11716	0,13385	0,14868	0,16626	0,17840
82	0,11645	0,13305	0,14779	0,16526	0,17732
83	0,11576	0,13226	0,14691	0,16428	0,17627
84	0,11508	0,13148	0,14605	0,16331	0,17523
85	0,11442	0,13072	0,14520	0,16236	0,17421
86	0,11376	0,12997	0,14437	0,16143	0,17321
87	0,11311	0,12923	0,14355	0,16051	0,17223
88	0,11248	0,12850	0,14274	0,15961	0,17126
89	0,11186	0,12790	0,14195	0,15873	0,17031
90	0,11125	0,12709	0,14117	0,15786	0,16938
91	0,11064	0,12640	0,14040	0,15700	0,16846
92	0,11005	0,12572	0,13965	0,15616	0,16755
93	0,10947	0,12506	0,13891	0,15533	0,16666
94	0,10889	0,12440	0,13818	0,15451	0,16579
95	0,10833	0,12375	0,13746	0,15371	0,16493
96	0,10777	0,12312	0,13675	0,15291	0,16408
97	0,10722	0,12249	0,13606	0,15214	0,16324
98	0,10668	0,12187	0,13537	0,15137	0,16242
99	0,10615	0,12126	0,13469	0,15061	0,16161
100	0,10563	0,12067	0,13403	0,14987	0,16081
$n > 100$	$1,073/\sqrt{n}$	$1,223/\sqrt{n}$	$1,358/\sqrt{n}$	$1,518/\sqrt{n}$	$1,629/\sqrt{n}$

Source : Miller L.H. (1956), JASA n°51, pp.113-115 (d'après [Saporta, 1990]).

Tableau A2 : données expérimentales sur le rendement du soja (source CGIAR).

ID	ENV\$	GEN\$	NEUV	NGEN	REP	YIELD	ID	ENV\$	GEN\$	NEUV	NGEN	REP	YIELD
1	A77	EVAN	1	1	1	2 729	56	V79	WELL	2	7	4	1 472
2	A77	EVAN	1	1	2	2 747	57	R81	EVAN	3	1	1	1 525
3	A77	EVAN	1	1	3	2 593	58	R81	EVAN	3	1	2	2 348
4	A77	EVAN	1	1	4	2 382	59	R81	EVAN	3	1	3	1 968
5	A77	WILK	1	2	1	2 662	60	R81	EVAN	3	1	4	2 309
6	A77	WILK	1	2	2	2 238	61	R81	WILK	3	2	1	1 484
7	A77	WILK	1	2	3	2 454	62	R81	WILK	3	2	2	1 426
8	A77	WILK	1	2	4	2 528	63	R81	WILK	3	2	3	1 091
9	A77	CHIP	1	3	1	2 638	64	R81	WILK	3	2	4	1 545
10	A77	CHIP	1	3	2	2 425	65	R81	CHIP	3	3	1	2 597
11	A77	CHIP	1	3	3	2 191	66	R81	CHIP	3	3	2	2 686
12	A77	CHIP	1	3	4	2 079	67	R81	CHIP	3	3	3	2 198
13	A77	HODG	1	4	1	2 680	68	R81	CHIP	3	3	4	1 920
14	A77	HODG	1	4	2	2 072	69	R81	HODG	3	4	1	2 404
15	A77	HODG	1	4	3	2 994	70	R81	HODG	3	4	2	3 028
16	A77	HODG	1	4	4	3 218	71	R81	HODG	3	4	3	2 742
17	A77	S200	1	5	1	2 598	72	R81	HODG	3	4	4	3 028
18	A77	S200	1	5	2	3 036	73	R81	S200	3	5	1	2 798
19	A77	S200	1	5	3	3 097	74	R81	S200	3	5	2	2 500
20	A77	S200	1	5	4	2 641	75	R81	S200	3	5	3	2 520
21	A77	CORS	1	6	1	2 908	76	R81	S200	3	5	4	2 650
22	A77	CORS	1	6	2	3 430	77	R81	CORS	3	6	1	2 170
23	A77	CORS	1	6	3	3 265	78	R81	CORS	3	6	2	3 125
24	A77	CORS	1	6	4	2 823	79	R81	CORS	3	6	3	2 825
25	A77	WELL	1	7	1	2 732	80	R81	CORS	3	6	4	3 750
26	A77	WELL	1	7	2	2 951	81	R81	WELL	3	7	1	2 903
27	A77	WELL	1	7	3	2 432	82	R81	WELL	3	7	2	2 944
28	A77	WELL	1	7	4	2 866	83	R81	WELL	3	7	3	2 428
29	V79	EVAN	2	1	1	983	84	R81	WELL	3	7	4	2 757
30	V79	EVAN	2	1	2	1 445	85	I85	EVAN	4	1	1	1 783
31	V79	EVAN	2	1	3	1 013	86	I85	EVAN	4	1	2	1 957
32	V79	EVAN	2	1	4	1 004	87	I85	EVAN	4	1	3	1 609
33	V79	WILK	2	2	1	824	88	I85	EVAN	4	1	4	1 593
34	V79	WILK	2	2	2	491	89	I85	WILK	4	2	1	1 902
35	V79	WILK	2	2	3	381	90	I85	WILK	4	2	2	1 534
36	V79	WILK	2	2	4	616	91	I85	WILK	4	2	3	1 416
37	V79	CHIP	2	3	1	1 286	92	I85	WILK	4	2	4	1 574
38	V79	CHIP	2	3	2	1 258	93	I85	CHIP	4	3	1	1 717
39	V79	CHIP	2	3	3	1 390	94	I85	CHIP	4	3	2	1 405
40	V79	CHIP	2	3	4	1 178	95	I85	CHIP	4	3	3	1 591
41	V79	HODG	2	4	1	1 299	96	I85	CHIP	4	3	4	1 637
42	V79	HODG	2	4	2	1 484	97	I85	HODG	4	4	1	1 707
43	V79	HODG	2	4	3	1 646	98	I85	HODG	4	4	2	1 955
44	V79	HODG	2	4	4	1 568	99	I85	HODG	4	4	3	1 825
45	V79	S200	2	5	1	2 196	100	I85	HODG	4	4	4	1 870
46	V79	S200	2	5	2	2 239	101	I85	S200	4	5	1	1 419
47	V79	S200	2	5	3	1 932	102	I85	S200	4	5	2	1 404
48	V79	S200	2	5	4	1 486	103	I85	S200	4	5	3	1 414
49	V79	CORS	2	6	1	2 159	104	I85	S200	4	5	4	1 262
50	V79	CORS	2	6	2	2 041	105	I85	CORS	4	6	1	1 814
51	V79	CORS	2	6	3	1 463	106	I85	CORS	4	6	2	1 967
52	V79	CORS	2	6	4	981	107	I85	CORS	4	6	3	1 615
53	V79	WELL	2	7	1	1 529	108	I85	CORS	4	6	4	1 797
54	V79	WELL	2	7	2	1 767	109	I85	WELL	4	7	1	1 378
55	V79	WELL	2	7	3	2 079	110	I85	WELL	4	7	2	1 656

ID	ENV\$	GEN\$	NEV	NGEN	REP	YIELD	ID	ENV\$	GEN\$	NEV	NGEN	REP	YIELD
111	I85	WELL	4	7	3	1 508	166	A86	WELL	6	7	2	3 641
112	I85	WELL	4	7	4	1 593	167	A86	WELL	6	7	3	3 353
113	G85	EVAN	5	1	1	3 194	168	A86	WELL	6	7	4	3 650
114	G85	EVAN	5	1	2	3 085	169	N87	EVAN	7	1	1	2 574
115	G85	EVAN	5	1	3	3 489	170	N87	EVAN	7	1	2	2 312
116	G85	EVAN	5	1	4	3 263	171	N87	EVAN	7	1	3	2 495
117	G85	WILK	5	2	1	2 619	172	N87	EVAN	7	1	4	2 793
118	G85	WILK	5	2	2	2 389	173	N87	WILK	7	2	1	1 989
119	G85	WILK	5	2	3	3 263	174	N87	WILK	7	2	2	2 394
120	G85	WILK	5	2	4	3 121	175	N87	WILK	7	2	3	2 138
121	G85	CHIP	5	3	1	2 742	176	N87	WILK	7	2	4	2 617
122	G85	CHIP	5	3	2	2 560	177	N87	CHIP	7	3	1	2 602
123	G85	CHIP	5	3	3	2 742	178	N87	CHIP	7	3	2	2 322
124	G85	CHIP	5	3	4	3 207	179	N87	CHIP	7	3	3	2 443
125	G85	HODG	5	4	1	3 561	180	N87	CHIP	7	3	4	2 752
126	G85	HODG	5	4	2	3 208	181	N87	HODG	7	4	1	2 892
127	G85	HODG	5	4	3	3 213	182	N87	HODG	7	4	2	2 368
128	G85	HODG	5	4	4	3 709	183	N87	HODG	7	4	3	2 941
129	G85	S200	5	5	1	2 760	184	N87	HODG	7	4	4	3 122
130	G85	S200	5	5	2	2 911	185	N87	S200	7	5	1	2 219
131	G85	S200	5	5	3	3 569	186	N87	S200	7	5	2	2 674
132	G85	S200	5	5	4	3 589	187	N87	S200	7	5	3	2 786
133	G85	CORS	5	6	1	3 039	188	N87	S200	7	5	4	2 655
134	G85	CORS	5	6	2	3 250	189	N87	CORS	7	6	1	2 840
135	G85	CORS	5	6	3	3 275	190	N87	CORS	7	6	2	2 467
136	G85	CORS	5	6	4	3 207	191	N87	CORS	7	6	3	3 067
137	G85	WELL	5	7	1	2 285	192	N87	CORS	7	6	4	2 438
138	G85	WELL	5	7	2	3 119	193	N87	WELL	7	7	1	2 726
139	G85	WELL	5	7	3	3 305	194	N87	WELL	7	7	2	2 363
140	G85	WELL	5	7	4	2 992	195	N87	WELL	7	7	3	2 580
141	A86	EVAN	6	1	1	2 989	196	N87	WELL	7	7	4	2 484
142	A86	EVAN	6	1	2	3 640	197	C87	EVAN	8	1	1	2 961
143	A86	EVAN	6	1	3	3 105	198	C87	EVAN	8	1	2	3 354
144	A86	EVAN	6	1	4	2 922	199	C87	EVAN	8	1	3	3 470
145	A86	WILK	6	2	1	2 652	200	C87	EVAN	8	1	4	3 307
146	A86	WILK	6	2	2	2 366	201	C87	WILK	8	2	1	3 348
147	A86	WILK	6	2	3	2 385	202	C87	WILK	8	2	2	2 909
148	A86	WILK	6	2	4	2 570	203	C87	WILK	8	2	3	3 169
149	A86	CHIP	6	3	1	3 317	204	C87	WILK	8	2	4	3 139
150	A86	CHIP	6	3	2	2 334	205	C87	CHIP	8	3	1	2 206
151	A86	CHIP	6	3	3	2 815	206	C87	CHIP	8	3	2	2 313
152	A86	CHIP	6	3	4	2 794	207	C87	CHIP	8	3	3	2 357
153	A86	HODG	6	4	1	3 764	208	C87	CHIP	8	3	4	2 429
154	A86	HODG	6	4	2	2 862	209	C87	HODG	8	4	1	2 484
155	A86	HODG	6	4	3	3 276	210	C87	HODG	8	4	2	2 467
156	A86	HODG	6	4	4	3 727	211	C87	HODG	8	4	3	2 302
157	A86	S200	6	5	1	2 900	212	C87	HODG	8	4	4	3 041
158	A86	S200	6	5	2	3 298	213	C87	S200	8	5	1	1 267
159	A86	S200	6	5	3	3 188	214	C87	S200	8	5	2	1 220
160	A86	S200	6	5	4	3 367	215	C87	S200	8	5	3	1 257
161	A86	CORS	6	6	1	3 639	216	C87	S200	8	5	4	1 207
162	A86	CORS	6	6	2	3 647	217	C87	CORS	8	6	1	2 177
163	A86	CORS	6	6	3	3 613	218	C87	CORS	8	6	2	1 324
164	A86	CORS	6	6	4	3 677	219	C87	CORS	8	6	3	1 998
165	A86	WELL	6	7	1	3 715	220	C87	CORS	8	6	4	1 363

ID	ENV\$	GEN\$	NENV	NGEN	REP	YIELD	ID	ENV\$	GEN\$	NENV	NGEN	REP	YIELD
221	C87	WELL	8	7	1	1 504	276	G88	CORS	10	6	4	3 328
222	C87	WELL	8	7	2	1 630	277	G88	WELL	10	7	1	4 447
223	C87	WELL	8	7	3	1 577	278	G88	WELL	10	7	2	3 509
224	C87	WELL	8	7	4	1 932	279	G88	WELL	10	7	3	2 750
225	C88	EVAN	9	1	1	4 370	280	G88	WELL	10	7	4	4 053
226	C88	EVAN	9	1	2	3 726							
227	C88	EVAN	9	1	3	3 818							
228	C88	EVAN	9	1	4	3 780							
229	C88	WILK	9	2	1	3 852							
230	C88	WILK	9	2	2	3 605							
231	C88	WILK	9	2	3	3 532							
232	C88	WILK	9	2	4	3 461							
233	C88	CHIP	9	3	1	3 185							
234	C88	CHIP	9	3	2	3 300							
235	C88	CHIP	9	3	3	3 042							
236	C88	CHIP	9	3	4	2 861							
237	C88	HODG	9	4	1	2 824							
238	C88	HODG	9	4	2	3 361							
239	C88	HODG	9	4	3	3 362							
240	C88	HODG	9	4	4	3 111							
241	C88	S200	9	5	1	2 022							
242	C88	S200	9	5	2	2 920							
243	C88	S200	9	5	3	2 353							
244	C88	S200	9	5	4	2 633							
245	C88	CORS	9	6	1	2 770							
246	C88	CORS	9	6	2	3 503							
247	C88	CORS	9	6	3	2 666							
248	C88	CORS	9	6	4	2 350							
249	C88	WELL	9	7	1	3 192							
250	C88	WELL	9	7	2	2 783							
251	C88	WELL	9	7	3	3 005							
252	C88	WELL	9	7	4	2 626							
253	G88	EVAN	10	1	1	5 437							
254	G88	EVAN	10	1	2	5 165							
255	G88	EVAN	10	1	3	4 273							
256	G88	EVAN	10	1	4	4 750							
257	G88	WILK	10	2	1	4 687							
258	G88	WILK	10	2	2	4 650							
259	G88	WILK	10	2	3	4 749							
260	G88	WILK	10	2	4	4 347							
261	G88	CHIP	10	3	1	3 085							
262	G88	CHIP	10	3	2	4 372							
263	G88	CHIP	10	3	3	3 492							
264	G88	CHIP	10	3	4	3 090							
265	G88	HODG	10	4	1	4 275							
266	G88	HODG	10	4	2	4 632							
267	G88	HODG	10	4	3	5 522							
268	G88	HODG	10	4	4	4 578							
269	G88	S200	10	5	1	4 615							
270	G88	S200	10	5	2	4 756							
271	G88	S200	10	5	3	4 243							
272	G88	S200	10	5	4	4 392							
273	G88	CORS	10	6	1	4 777							
274	G88	CORS	10	6	2	4 941							
275	G88	CORS	10	6	3	3 790							